

Geometrija 3

Zadaci za vežbanje

- Data je kriva $\alpha(t) = (a \cos t, \frac{1}{7}a \cos t - \frac{4\sqrt{3}}{7}b \sin t, \frac{4\sqrt{3}}{7}a \cos t + \frac{1}{7}b \sin t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
 - Izračunati krivinu i torziju krive α .
 - Dokazati da je kriva elipsa.
 - Naći jednačine ravni i elipsoida u preseku kojih se dobija kriva α .
- Izvesti formulu za krivinu i torziju krive koja je zadata jednačinama $y = y(x)$, $z = z(x)$. Naći Frenet-Serret-ov reper ove krive u proizvoljnoj tački.
- Naći jednačinu ravanske krive γ u prvom kvadrantu Oxy -ravni sa osobinom da je odstojanje svake tačke A krive γ do preseka tangente na krivu u tački A sa y -osom jednako datoj konstanti a .
- Date su glatka kriva k i tačka P van nje. Neka je Q tačka krive k najbliža tački P . Dokazati da je prava PQ normalna na krivoj k u tački Q .
- Na površi $r(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$ dat je trougao $0 \leq u \leq \sinh v$, $0 \leq v \leq v_0$. Naći:
 - površinu ovog trougla;
 - dužinu njegovih stranica;
 - geodezijske krivine njegovih stranica;
 - uglove trougla.
- Dokazati da ako površ sadrži pravu liniju, onda je ta prava geodezijska linija te površi.
 - Naći najkraće rastojanje između tačaka $A(1, 1, 1)$ i $B(1, -1, -1)$ na hiperboloidu $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ mereno po hiperboloidu.
- Neka je $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizovana površ, $\mathcal{U} = (a, b) \times (c, d)$, sa prvom formom $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Pokazati da ako je srednja krivina $H = 0$, onda je f harmonijska funkcija, tj. $\Delta f = f_{uu} + f_{vv} = 0$.
- Odrediti glavne krivine i glavne pravce površi $f(u, v) = (\cos v - u \sin v, \sin v + u \cos v, u + v)$.
- Odrediti asimptotske krive helikoida.
- Izračunati Kristofelove simbole i Gausovu krivinu euklidske ravni sa polarnim koordinatama.
- Površ M_1 i M_2 seku se po krivoj c . Neka je κ krivina krive c , λ_i normalne krivine c u M_i i θ ugao između normala M_1 i M_2 . Dokazati da važi $\kappa^2 \sin \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \sin \theta$.
- U Poenkareovom disk modelu \mathcal{D}^2 hiperboličke ravni sa metrikom $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ date su tačke $A = (0, 0)$ i $B = (\varepsilon, 0)$, $0 < \varepsilon < 1$.
 - Odrediti središte duži AB .
 - Odrediti simetralu duži AB .
 - Odrediti jednačinu kruga sa centrom u tački B i poluprečnika r . (Poznato je da će tražena kriva i euklidski biti krug.)